

L'algèbre relationnelle

Guillaume Aubian

Université Paris Panthéon-Assas

Pratiquement

Une relation est représentée par un tableau.

Schéma de relation : $R(\text{Attribut}_1, \dots, \text{Attribut}_n)$

Ex. $R(\text{N}^\circ\text{étudiant}, \text{Nom}, \text{Âge}, \text{Prof père})$

N° étudiant	Nom	Âge	Prof père
430	Dupont	20	Enseignant
651	Durant	23	Dentiste
941	Martin	20	Commercial

- Sur ces relations, existent des opérateurs.
- Ces opérateurs définissent l'algèbre relationnelle.
- Ils opèrent sur des relations et produisent de nouvelles relations : construction de nouvelles informations à partir des relations de départ et d'une composition séquentielle d'opérateurs.
- **3 catégories d'opérateurs relationnels :**
 - Opérateurs binaires sur 2 relations de schémas différents : *jointure*, *produit cartésien*, *division*.
 - Opérateurs binaires sur 2 relations de même schéma : *union*, *intersection*, *différence*.
 - Opérateurs unaires : *affectation*, *sélection*, *projection*.

- Sauvegarder le résultat d'une expression de recherche
- Renommer une relation et ses attributs

$R(A_1, \dots, A_n) = \text{expression de sélection}$

$R = \text{expression de sélection}$

- Suppression des occurrences de la relation qui ne satisfont pas une condition donnée

$\text{SELECTION}(R, \text{condition-de-sélection})$ ou $\sigma_{\text{cond}}(R)$

- **En entrée** : une relation R définie sur un schéma S_R
- **En sortie** : une nouvelle relation de même schéma S_R dont les nuplets satisfont la condition

La condition de sélection est une condition booléenne construite à partir :

- des connecteurs logiques : *et*, *ou*, *non*
- de conditions simples :
 - attribut de R – opérateur de comparaison – constante
 - attribut de R – opérateur de comparaison – attribut de R

SELECTION — Exemple

Considérons la relation `Etudiant_eco` définie par le schéma
`Etudiant_eco(N° étudiant, Nom-étudiant, Année-étude)`

$$R_1 = \text{SELECTION}(\text{Etudiant_eco}, \text{Année-étude} = 1)$$

N° Etudiant	Nom-étudiant	Année-étude
843	Carole	1
521	Peter	3
864	Paulo	1

Résultat R_1

N° Etudiant	Nom-étudiant	Année-étude
843	Carole	1
864	Paulo	1

Requête : *Toutes les informations sur les étudiants de 1ère année*

- Supprimer des attributs d'une relation

$$\text{PROJECTION}(R, A_1, \dots, A_n) \quad \text{ou} \quad \pi_{A_1, \dots, A_n}(R)$$

- **En entrée** : relation R sur schéma S_R
- **En sortie** : relation sur schéma $(A_1, \dots, A_n) \subseteq S_R$
- suppression des doublons produits par la restriction au sous-schéma
- $|\text{résultat}| \leq |R|$

PROJECTION — Exemple

Etudiant_eco(N° étudiant, Nom-étudiant, Année-étude)

$R_2 = \text{PROJECTION}(\text{Etudiant_eco}, \text{Année-étude})$

N° Etudiant	Nom-étudiant	Année-étude
843	Carole	1
521	Peter	3
864	Paulo	1

Résultat R_2

Année-étude

1

3

→ Suppression d'une occurrence avec
Année-étude=1

Requête : *Année d'étude des étudiants*

Une personne s'est constituée une base de données sur les personnes qu'elle invite et les plats qu'elle leur sert.

Cette base est composée de 3 relations :

- Repas(Date, Invité) : liste des invités reçus et à quelle date
- Menu(Date, Plat) : menu servi à chaque date
- Préférence(Invité, Plat) : pour chaque personne ses plats préférés

Par cette table, il est possible de connaître les personnes susceptibles d'être invitées.

Repas(Date, Invité), Menu(Date, Plat), Préférence(Invité, Plat)

Quels sont les invités du repas du 15/05/2019 ?

$R_1 = \text{SELECTION}(\text{Repas}, \text{Date} = 15/05/2019)$

$\text{Rés} = \text{PROJECTION}(R_1, \text{Invité})$

ou $\text{Rés} = \text{PROJECTION}(\text{SELECTION}(\text{Repas}, \text{Date} = 15/05/2019), \text{Invité})$

En SQL

SELECT r.Invité	PROJECTION
FROM Repas AS r	
WHERE r.Date='2019-05-15'	SELECTION

Projection — Exercice (exemple)

Repas

Date	Invité
15/05/2019	Alice
15/05/2019	Jacques
20/05/2019	Alice
16/06/2019	Pierre
20/06/2019	Jean
20/06/2019	Jacques
25/07/2019	Héloïse

$R_1 = \text{SELECTION}(\text{Repas}, \text{Date} = 15/05/2019)$

Date	Invité
15/05/2019	Alice
15/05/2019	Jacques

$\text{Rés} = \text{PROJECTION}(R_1, \text{Invité})$

<u>Rés</u>
Invité
Alice
Jacques

- Fusionner 2 relations ayant les mêmes attributs en une seule relation

$$\text{UNION}(R, S) \quad \text{ou} \quad R \cup S$$

- **En sortie** : relation de même schéma que R (donc S), contenant les nuplets de R et ceux de S (doublons supprimés).

Union — Exemple

Etudiant_eco(N° étudiant, Nom-étudiant, Année-étude)

Etudiant_droit(N° étudiant, Nom-étudiant, Année-étude)

Etudiant_eco

N°	Nom	Année
843	Carole	1
521	Peter	3
864	Paulo	1

Etudiant_droit

N°	Nom	Année
324	Catherine	2
521	Peter	3
201	Didier	1

$R_3 = \text{UNION}(\text{Etudiant_eco}, \text{Etudiant_droit})$

N°	Nom	Année
843	Carole	1
521	Peter	3
864	Paulo	1
324	Catherine	2
201	Didier	1

Requête : *toutes les informations sur les étudiants de l'école*

- Fournir les occurrences présentes dans les 2 relations à la fois

$$\text{INTERSECTION}(R, S) \quad \text{ou} \quad R \cap S$$

- **En sortie** : relation (même schéma) ayant les nuplets présents dans R et dans S .

$R_4 = \text{INTERSECTION}(\text{Etudiant_eco}, \text{Etudiant_droit})$

N°	Nom	Année
521	Peter	3

Requête : *Toutes les informations sur les étudiants qui suivent les 2 cursus*

Repas(Date, Invité), Menu(Date, Plat), Préférence(Invité, Plat)

À quelle(s) date(s) la personne a reçu les 2 invités Jacques et Jean ?

Dates où Jacques a été reçu :

$$R_1 = \text{SELECTION}(\text{Repas}, \text{Invité} = 'Jacques'), \quad R_2 = \text{PROJECTION}(R_1, \text{Date})$$

Dates où Jean a été reçu :

$$R_3 = \text{SELECTION}(\text{Repas}, \text{Invité} = 'Jean'), \quad R_4 = \text{PROJECTION}(R_3, \text{Date})$$

Dates où **les deux** ont été reçus :

$$\text{Rés} = \text{INTERSECTION}(R_2, R_4)$$

Intersection — Exercice (données)

Repas

Date	Invité
15/05/2019	Alice
15/05/2019	Jacques
20/05/2019	Alice
16/06/2019	Pierre
20/06/2019	Jean
20/06/2019	Jacques
25/07/2019	Héloïse

R_2 (dates de Jacques)

Date
15/05/2019
20/06/2019

R_4 (dates de Jean)

Date
20/06/2019

Rés = INTERSECTION(R_2 , R_4)

Date

20/06/2019

Opérateurs binaires (même schéma) — Différence

- Obtenir les occurrences d'une relation qui n'appartiennent pas à une autre relation

$$\text{DIFFERENCE}(R, S) \quad \text{ou} \quad R - S$$

- **En sortie** : relation (même schéma) avec les nuplets de R qui ne sont pas dans S
- La différence n'est **pas** commutative

Différence — Exemple

Etudiant_eco(N° étudiant, Nom-étudiant, Année-étude)

Doublant(N° étudiant, Nom-étudiant, Année-étude)

$R_5 = \text{DIFFERENCE}(\text{Etudiant_eco}, \text{Doublant})$

N°	Nom	Année
843	Carole	1

Requête : *Toutes les informations sur les étudiants qui ne sont pas doublants*

Repas(Date, Invité), Menu(Date, Plat), Préférence(Invité, Plat)

Quelles sont les personnes qui n'ont jamais été invitées ?

$R_1 = \text{PROJECTION}(\text{Préférence}, \text{Invité})$ $R_2 = \text{PROJECTION}(\text{Repas}, \text{Invité})$

$\text{Rés} = \text{DIFFERENCE}(R_1, R_2)$

Différence — Exercice (SQL)

```
SELECT DISTINCT p.Invité  
FROM Préférence AS p  
WHERE p.Invité NOT IN  
(SELECT DISTINCT r.Invité FROM Repas AS r)
```


Différence — Exercice (données Préférence)

Invité	Plat
Pierre	Pâtes
Pierre	Mousse au chocolat
Jacques	Riz
Thierry	Bœuf bourguignon
Alice	Poulet basquaise
Jean	Blanquette de veau
Héloïse	Mousse au chocolat

$$R_1 = \pi_{\text{Invité}}(\text{Préférence})$$

Différence — Exercice (R_1 , R_2 , Rés)

R_1

Invité

Pierre

Jacques

Thierry

Alice

Jean

Héloïse

R_2

Invité

Alice

Jacques

Pierre

Jean

Héloïse

Rés = $R_1 - R_2$

Invité

Thierry

Soient R et S , 2 relations définies sur les schémas S_R et S_S (disjoints).

$$\text{PRODUIT}(R, S) \quad \text{ou} \quad R \times S$$

- Schéma résultat : union des schémas $S_R \cup S_S$
- Nuplets résultat : concaténation de chaque nuplet de R avec chaque nuplet de S
- Nombre d'occurrences : $|R \times S| = |R| \cdot |S|$

PRODUIT CARTÉSIEN — Exemple

Etudiant_eco

N°	Nom	Année
843	Carole	1
521	Peter	3
864	Paulo	1

Matière

Code	Intitulé
M01	Mathématique
M02	Informatique

PRODUIT(Etudiant_eco, Matière) concatène, pour chaque occurrence de Etudiant_eco, chaque occurrence de Matière.

PRODUIT CARTÉSIEN — Exemple (résultat)

$R_6 = \text{PRODUIT}(\text{Etudiant_eco}, \text{Matière})$

N°	Nom	Année	Code	Intitulé
843	Carole	1	M01	Mathématique
843	Carole	1	M02	Informatique
521	Peter	3	M01	Mathématique
521	Peter	3	M02	Informatique
864	Paulo	1	M01	Mathématique
864	Paulo	1	M02	Informatique

Opérateurs binaires (schémas différents) — Jointure

Soient R et S définies sur S_R et S_S (avec des attributs de même domaine).

$$\text{JOINTURE}(R, S, \text{condition}) \quad \text{ou} \quad R \bowtie_{\text{condition}} S$$

- Schéma résultat : $S_R \cup S_S$
- Nuplets résultat : concaténations respectant la condition

JOINTURE — Exemple

$R_7 = \text{JOINTURE}(\text{Etudiant_eco}, \text{Père}, \text{N}^\circ \text{ étudiant} = \text{Code})$

Etudiant_eco

N°	Nom	Année
843	Carole	1
521	Peter	3
864	Paulo	1

Père

Code	Âge	Prof
843	40	Enseignant
521	50	Dentiste
864	42	Commercial

Résultat (concaténé) : infos sur l'étudiant et son père.

Requête : *toutes les informations sur les étudiants et leur père*

Repas(Date, Invité), Menu(Date, Plat), Préférence(Invité, Plat)

Quels sont les plats qui ont été servis à Alice ?

$$R_1 = \text{SELECTION}(\text{Repas}, \text{Invité} = 'Alice')$$
$$R_2 = \text{JOINTURE}(\text{Menu}, R_1, \text{Menu.Date} = R_1.\text{Date})$$
$$\text{Rés} = \text{PROJECTION}(R_2, \text{Plat})$$

En SQL

```
SELECT DISTINCT m.Plat
FROM Menu AS m INNER JOIN Repas AS r
ON r.Date=m.Date
WHERE r.Invité='Alice'
```


Jointure — Exercice (sélection)

Repas

Date	Invité
15/05/2019	Alice
15/05/2019	Jacques
20/05/2019	Alice
16/06/2019	Pierre
20/06/2019	Jean
20/06/2019	Jacques
25/07/2019	Héloïse

$$R_1 = \sigma_{\text{Invité}='Alice'}(\text{Repas})$$

Date	Invité
15/05/2019	Alice
20/05/2019	Alice

Jointure — Exercice (jointure)

Menu

Date	Plat
15/05/2019	Raclette
15/05/2019	Salade de fruits
20/05/2019	Avocats
20/05/2019	Fondue bourguignonne
16/06/2019	Bolognaise
20/06/2019	Pizza
25/07/2019	Burgers

$$R_2 = \text{Menu} \bowtie_{\text{Menu.Date}=R_1.\text{Date}} R_1$$

$$\text{Rés} = \pi_{\text{Plat}}(R_2)$$

Plat

Raclette

Salade de fruits

Avocats

Fondue bourguignonne

- L'auto-jointure est une jointure (réalisée par une condition logique) dans laquelle la même table est utilisée deux fois.
- On utilise des alias différents pour distinguer les deux entrées.

Nom de l'étudiant dont le père est le plus âgé

```
Etudiant_eco(N° étudiant, Nom-étudiant, Année-étude)  
Père(Code, Age, Prof)
```

Auto-jointure — Exemple (idée)

$R_1 = \text{AUTO-JOINTURE}(\text{Père AS P1}, \text{Père AS P2}, \text{P1.Age} = \max(\text{P2.Age}))$

$R_2 = \text{JOINTURE}(R_1, \text{Etudiant_eco}, \text{P1.Code} = \text{N}^\circ\text{Etudiant})$

$\text{Rés} = \text{PROJECTION}(R_2, \text{Nom-étudiant})$

Auto-jointure — Exemple (cas 1)

Si le maximum est unique (ex. 50 pour le code 521) alors :

$$\text{Rés} = \{\text{Peter}\}$$

Auto-jointure — Exemple (cas 2 : ex æquo)

Si plusieurs pères ont l'âge maximal (ex. 50 pour 521 et 864) alors :

$$\text{Rés} = \{\text{Peter}, \text{Paulo}\}$$

Étudiant dont le père est le plus âgé

$$V_1 = \text{CALCULE}(\text{Père}, \max(\text{Age}))$$

$$R_1 = \text{SELECTION}(\text{Père}, \text{Age} = V_1)$$

$$R_2 = \text{JOINTURE}(R_1, \text{Etudiant_eco}, \text{Code} = \text{N}^\circ\text{Etudiant})$$

$$\text{Rés} = \text{PROJECTION}(R_2, \text{Nom-étudiant})$$

$$V_1 = 50$$

Repas(Date, Invité), Menu(Date, Plat), Préférence(Invité, Plat)

Nom des personnes invitées lors du dernier repas

$$R_1 = \text{AUTO-JOINTURE}(\text{Repas AS Re1}, \text{Repas AS Re2}, \text{Re1.Date} = \max(\text{Re2.Date}))$$

$$\text{Rés} = \pi_{\text{Re1.Invité}}(R_1)$$

Dans R_1 , il y a 2 attributs Invité : Re1.Invité et Re2.Invité.

Nom des personnes invitées lors du dernier repas

$V_1 = \text{CALCULE}(\text{Repas}, \max(\text{Date})) \Rightarrow V_1 = (\text{date du dernier repas})$

$R_1 = \text{SELECTION}(\text{Repas}, \text{Date} = V_1) \quad \text{Rés} = \pi_{\text{Invité}}(R_1)$

Si $\max(\text{Date}) = 16/05/2019$, alors :

$$R_1 = \sigma_{\text{Date}=16/05/2019}(\text{Repas}) \quad \text{Rés} = \pi_{\text{Invité}}(R_1) = \{\text{Jean-Luc, Didier}\}$$

Repas(Date, Invité), Menu(Date, Plat), Préférence(Invité, Plat)

Noms des personnes pour lesquelles la personne a répertorié plusieurs plats préférés

$R_1 = \text{AUTO-JOINTURE}(\text{Préférence AS } P_1, \text{Préférence AS } P_2, P_1.\text{Invité} = P_2.\text{Invité})$

$R_2 = \text{SELECTION}(R_1, P_1.\text{Plat} \neq P_2.\text{Plat})$

$\text{Rés} = \pi_{P_1.\text{Invité}}(R_2)$

Auto-jointure — Exercice (interprétation)

L'auto-jointure sur `Invité` produit des paires de plats pour un même invité.

La sélection `P1.Plat <> P2.Plat` élimine les paires identiques, ne gardant que les invités ayant au moins 2 plats distincts.

Puis la projection renvoie la liste des invités concernés.

Opérateurs binaires (schémas différents) — Division

- R est définie sur un schéma S_R composé de X et Y : $S_R = X \cup Y$
- S est définie sur un schéma S_S composé de Y : $S_S = Y$

$$\text{DIVISION}(R, S) \quad \text{ou} \quad R/S$$

- **En sortie** : relation de schéma $S_R - S_S$ contenant tous les nuplets dont la concaténation avec **tous** les nuplets de S appartient à R .

$$\text{Si } R/S = Z \text{ alors } Z \times S \subseteq R \quad (\text{analogie } A/B = C \Leftrightarrow C \times B = A)$$

Que se passe-t-il pour les attributs ?

Supposons :

- R : Attribut 1, attribut 2, attribut 3
- S : Attribut 1, attribut 2

Alors $\text{DIVISION}(R, S)$ a pour attribut : Attribut 3.

$$(\text{Attribut 1, Attribut 2, Attribut 3}) / (\text{Attribut 1, Attribut 2}) \Rightarrow \text{Attribut 3}$$

Repas(Date, Invité), Menu(Date, Plat), Préférence(Invité, Plat)

Quels sont les invités qui sont venus à tous les repas ?

Idée : récupérer l'ensemble des dates de repas, puis diviser.

$$R_1 = \pi_{\text{Date}}(\text{Repas}) \quad \text{Rés} = \text{DIVISION}(\text{Repas}, R_1)$$

Division — Exercice (intuition)

Le résultat Rés doit vérifier :

$$\text{Rés} \times R_1 \subseteq \text{Repas}$$

Donc un invité est dans Rés s'il apparaît dans Repas **pour chaque date** de R_1 .

Division — Exercice (exemple Didier)

Si $R_1 = \{14/5, 15/5, 16/5\}$ et que Didier est présent aux trois dates, alors

$$\{\text{Didier}\} \times R_1 = \{(14/5, \text{Didier}), (15/5, \text{Didier}), (16/5, \text{Didier})\} \subseteq \text{Repas}$$

Donc Didier appartient au résultat.

Division — Exercice (contre-exemple Dominique)

Si Dominique n'apparaît pas à toutes les dates, alors

$$\{\text{Dominique}\} \times R_1 \not\subseteq \text{Repas}$$

Donc Dominique n'appartient pas au résultat.

Repas(Date, Invité), Menu(Date, Plat), Préférence(Invité, Plat)

Plats répertoriés comme préférés par toutes les personnes

Nom de toutes les personnes :

$$R_1 = \pi_{\text{Invité}}(\text{Préférence})$$

Plats aimés par tout le monde :

$$\text{Rés} = \text{DIVISION}(\text{Préférence}, R_1)$$

Division — Exercice (lecture du résultat)

Le résultat Rés (sur l'attribut Plat) doit vérifier :

$$\text{Rés} \times R_1 \subseteq \text{Préférence}$$

Autrement dit, un plat est dans Rés s'il est associé (dans Préférence) à **chaque** invité de R_1 .

Exemple typique : Crêpe.